⟨To be revised⟩

Vertex operator algebra constructed from Code and its representations

By

宮本 雅彦 (筑波大学)

須藤 清一 (岡山理科大) 記

頂点作用素代数 (vertex operator algebra, VOA)

$$\begin{cases} \text{数理物理} & = & \text{2 次元共形場理論} \\ \text{表現論} & = & \text{アフィンリー代数，ヴィラソロ代数の拡張} \\ \text{有限群論} & = & \text{モンスター単純群，モジュラー函数} \\ & & \cdots \text{ムーンシャイン VOA} \end{cases}$$

目次

1) 頂点作用素代数入門

リー群, リー代数との関係

2) イジング模型と自己同型

3) コード VOA の表現論

$$\text{応用} \begin{cases} \text{ムーンシャイン VOA} \\ E_8 \end{cases}$$

要点

1) VOA とは 次数付きのベクトル空間 $V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n$ で内部に無限個 $\{\times_m; n \in Z\}$ の演算を持つ．

$(V_1, \times_0)$: リー代数 ($\dim < +\infty$，不変内積を持つ)．$\longrightarrow$ リー群 $\leq \mathrm{Aut}(V)$.

2) イジング模型 $L(\frac{1}{2},0)$ $L(\frac{1}{2},0) \subseteq V \Longrightarrow$ 自己同型が定義できる．

ルートラティスの中で

$$(\alpha,\alpha)=2 \implies reflection \text{ を与える．}$$

ルート

$$(\alpha,\alpha)=4 \implies \text{自己同型}\tau\text{を与える．}$$

1987．Cohen,Griess

$\mathbb{C}$ 上 E_8-型リー群の有限単純部分群の分類

$$\subseteq \quad \exists \text{大きな有限部分群} \quad = N(T)$$

$$\bigtriangledown$$

$$\langle \text{上の自己同型}\tau\text{達} \rangle = T$$

(一部)

1) VOA の入門

(1) Frenkel-Kac 頂点作用素による単純リー代数の構成

(2) Frenkel-Lepowsky-Meurman ムーンシャイン加群の構成

Borcherds(1986) 頂点 (作用素) 代数の公理

(3) Belavin-Polyakov-Zamolodchikov 極小 2 次元共形場理論の決定

(4) Feigin semi-infinite cohomology

(5) Koszul Lie superalgebra の研究

(2) ~ (5) は 2 次元共形場理論に関係する (VOA が厳密な公理を与えている)．

Wightman 1957: 場の量子論

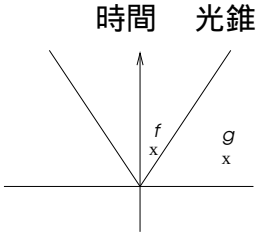
量子場理論とは　真空 $\in$ 複素ヒルベルト空間 H．H のポアンカレ群のユニタリ表現．ミンコフスキー空間 M (時間 1 次元$\oplus$空間) の作用素を値に持つ．超函数 (distribution) である φ_a の集まりで

1) ポアンカレ不変

2) 真空の不変性

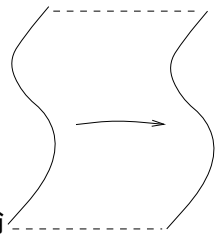
3) 真空から φ_a で張られた空間が H の中で dense

4) 局所可換 f, g が空間的に離れていると



$$\varphi_a(f)\varphi_b(g) = \varphi_b(g)\varphi_a(f)$$

VOA $\left\{\begin{array}{l} \text{空間が } 1 \text{ 次元} \\ \text{共形変換に関して不変} \end{array}\right.$



形式的に考える．

R: 環，$R[z, z^{-1}]$: 多項式環，$\{a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}\ ;\ a_n \in \mathbb{R}\} = R[[z, z^{-1}]]$ を形式的超函数とする．V: ベクトル空間，$\mathbb{R} = \mathrm{End}(V)$．

次の条件を満たすものを考える．

$$\forall v \in V \exists N_v \ \text{ s.t. } \ a_n v = 0 \forall n > N_v.$$

このような $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ を weak vertex operator (w.v.o.) と呼ぶ．$n \in \mathbb{Z}$, $a_n(z) = \sum a_n z^{-n-1}, b(z) = \sum b_n z^{-n-1}$: w.v.o. に対して積を

$$a(z)_n b(z) = \mathrm{Res}_x \left[(x-z)^n a(x)b(x) - (-z+x)^x b(z)a(z)\right]$$

で定義し，これを n-th 正規積と呼ぶ．

記号の説明

2 項係数

$$\left.\begin{array}{l} n \in \mathbb{C} \\ i \in \{0, 1, \ldots\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \binom{n}{i} = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$$

2 項展開

$$l_{(x,z)}(x+z)^n = \sum_{i=0}^{\infty} x^{n-i} z^i.$$

(注意：z の指数は自然数.)

$l_{(x,z)}(x+z)^n \neq l_{(z,x)}(x+z)^n$ に注意．$l_{(z,x)}(x+z)^n = (z+x)^x$ と書く．

$Res_x\{\sum a_n x^{-n-1}\} = a_0$: 留数

$(x-z)^{-1}a(x)b(z)$ の $x^s z^t$ の係数は $\sum_{i=0}^{\infty} a_{-i-2-s} b_{-1-t+i}$ と無限和．w.v.o の仮定より

$$v \in V \Longrightarrow \sum a_{-i-2-s} b_{-1-t+i} v \in V\text{は有限和で} \in V.$$

- $a(z)_0 b(z) = [a_0, b(z)]$.
- $a(z)_{-1} b(z)$ は古典的な正規積に対応．

系 1 (Li). $a(z), b(z)$: *w.v.o* $\Longrightarrow a(z)_n b(z)$ も *w.v.o* .

局所可換の定義

$(x-z)^n a(x)b(z) = (x-z)^n b(z)a(x)$ となる自然数 n が有るとき $a(z)$ と $b(z)$ を局所可換と呼ぶ．記号: $a(z) \sim b(z)$.

$|z| < 1$ のとき $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$, $|z| > 1$ のとき $\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}) = -z^{-1} - z^{-2} - \ldots$, これらを形式的に加えると $\delta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n$: デルタ函数 を得る．これを 0 の展開と呼ぶ．

$$(z-1)f(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(z) = t\delta(z)$$

$$(z-1)^2 f(z)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(z)=t_1\delta(z)+t_2\delta'(z)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

局所可換 $\Longleftrightarrow$ 交換子が 2 変数の δ 函数の微分達の線型和．

V.O.A. の公理

$V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$: 次数付きベクトル空間，$\dim V_n \leq \infty$，対応

$$V \ni v \mapsto Y(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^{-n-1},\ v_n \in End(V)$$

の組で次の条件を満たす．

1)

$$\mathbf{1}\in V_0\text{: 真空 s.t. } \begin{cases} Y(\mathbf{1},z)=1_V (\text{i.e.}\mathbf{1}_{-1}=1_V,\ \mathbf{1}_n=0 \forall n\neq -1) \\ \text{and} \\ v_{-1}\mathbf{1}=v,\ v_n\mathbf{1}=0\ \forall n\geq 0\ \forall v\in V. \end{cases}$$

2) $\omega\in V_2$: ヴィラソロ元で $Y(\omega,z)=\sum\omega_n z^{-n-1}=\sum L(n)z^{-n-2}$ とすると

i) $[L(n),L(m)]=(n-m)L(n+m)+\delta_{n+m,0}\frac{n^3-m}{12}c$，

ii) $[L(-1),Y(v,z)]=\frac{d}{dz}Y(v,z)$，

iii) $[L(0)|_{V_n}=n1_{V_n}$．

3) $Y(w,z)$ は互いに局所可換となる．

$$\begin{aligned}
[Y(w,z),Y(w,x)] &= \sum_{n,m}[L(n),L(n)]z^{-n-2}x^{-m-2} \\
&= \sum_{n,m}(n-m)L(n+m)z^{-n-2}x^{-m-2} \\
&= \sum_h hL(h)z^{-h-2}x^{-2}\delta(z/x) \\
&\qquad -2\sum_h L(h)z^{-h-1}x^{-3}\delta'(z/x)+z^{-4}\delta'''(z/x).
\end{aligned}$$

系 **2** (Dong). $a(z), b(z), c(z)$: 互いに局所可換 *(i.e.* $a(z) \sim b(z) \sim c(z) \sim a(z)$*)* $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} a(z)_n b(z) & \sim & c(z) \\ \frac{d}{dz}a(z) & \sim & c(z) \end{cases} \forall n \in Z.$$

系 **3.**
$$\left.\begin{array}{rcl} [L(-1), a(z)] & = & a'(z) \\ [L(-1), b(z)] & = & b'(z) \end{array}\right\} \Longrightarrow [L(-1), a(z)] = (a(z)_n b(z))'.$$

ヴィラソロ代数を Vir と書く．ヴィラソロ代数の既約 highest weight 表現 V に対して，$L(n) \in \mathrm{End}(V)$ と考える．$w(z) = \sum L(n) z^{-n-2}$．正規積，微分を繰り返してできる形式的巾級数全体を $\mathcal{F}$ とする．しかも V の heishest weight $= 0$，$\mathbf{1}$: heighest weight vector とすると $\mathcal{F} \ni a(z) \mapsto a_{-1}\mathbf{1} \in V$ は準同形，$\mathcal{F} = V$ が V.O.A. となる．これをヴィラソロ V.O.A. と呼ぶ．代数としては，$V \ni a, b$ に対して $Y(a, z) = \sum a_n z^{-n-1}$ の各 $a_n \in \mathrm{End}V$ による$\times_n : a, b \mapsto a_n b \in V$ という無限個の演算をもつもの．

$$\text{局所可換} \iff [a_n, b_m] = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} (a_i b)_{n+m-i}$$

作用素積展開そのもの．

特に $\times_0$ に注目する．$[a_0, b_m] = (a_0 b)_m$，しかも

$$a \in V_n \Longrightarrow a_m(V_i) \subset V_{n+i-m-1}.$$

特に $a \in V_1$ とすると

$$a_0(V_i) \subset V_i.$$

従って $(V_1, \times_0)$ は代数となるが，これが不変内積を持つリー代数になる．

$V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ の場合のみを考える．$a, b \in V_1$ に対して $a_1 b \in V_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$．そこで $(a, b)\mathbf{1} = a_1 b$ で内積 $(\cdot, \cdot)$ を定義する．

$a \in V_1$ に対して $\exp(a_0) = 1 + a_0 + \frac{1}{2!}a_0^2 + \ldots$ は V の自己同型．従って V_1 に対応するリー群 $\subset \mathrm{Aut}(V)$ とみなせる．特にこのリー群は各 V_n に作用し，$V_n \otimes V_m \longrightarrow V_k$ を保つ．

逆に不変内積を持つリー代数 $\mathfrak{g}$ に対して，アフィン化 $\mathfrak{g}[t,t^{-1}]+\mathbb{C}c$ とその highest weight 0 の既約表現 V が与えられると，$g(z)=\sum g(n)z^{-n-1}$, $g(n)=g\otimes t^n\in EndV$ からヴィラソロ代数の場合と同様にして V.O.A ができる．

ヴィラソロ代数 V.O.A.

central charge $\frac{1}{2}$ の単純ヴィラソロ V.O.A. を $L(\frac{1}{2},0)$ と書く　$\cdots$ 2 次元 Ising 模型．

$L(\frac{1}{2},0)$ の既約加群は $L(0),L(\frac{1}{2}),L(\frac{1}{16})$ の三つ $(0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}$ は highest weights)．

加群

V: V.O.A.，$M=\oplus_{n=0}^{\infty}M_n$: vector space，$V\ni v\mapsto Y^M(v,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_n^Mz^{-n-1}$ があって

1) $[L^M(-1),Y^M(v,z)]=\frac{d}{dz}Y^M(v,z)$，

2) $Y^M(v,z)$: 局所可換，

3) $Y^M(u_nv,z)=Y^M(u,z)_nY^M(v,z)$．

を満たすものを加群と呼ぶ．$\mathrm{Hom}(M^1,M^2)$ 又は $M^1\otimes M^2$ に対応するものとして，加群 (M^1,Y^1), (M^2,Y^2), (M^3,Y^3) に対して，$M^1\ni u\mapsto I(u,z)=\sum_{n\in C}u_nz^{-n-1}$, $u_n\in\mathrm{Hom}(M^2,M^3)$ s.t.

i) $L^3(-1)I(u,z)-I(u,z)L^2(-1)=\frac{d}{dz}I(u,z)$，

ii) $(x-z)^N(Y^3(v,x)I(u,z)-I(n,z)Y^2(v,z))=0$ for $N\gg0$，

iii)

$$\begin{aligned}I(v_nu,z) &= Y(v_1,z)_nI(u,z)\\ &:= \mathrm{Res}_x\left[(x-z)^nY^3(v,x)I(u,z)-(-z+x)^nI(u,z)Y^2(v,x)\right].\end{aligned}$$

を満たす $I(*,z)$ を intertwinig operator と呼び，その全体を $I\binom{M^3}{M^1M^2}$，次元を $N_{M^1M^2}^{M^3}$ と書く．

Fusion rule

M^2, M^3 に対して

$$M^2 \times M^3 = \sum_{W:\text{既約加群全体}} N_{WM^2}^{M^3} W.$$

$L(0)$: 単位元, 積は可換

$L(\frac{1}{2})$ の時には $L(\frac{1}{2}) \times L(\frac{1}{2}) = L(0)$, $L(\frac{1}{2}) \times L(0) = L(\frac{1}{2})$

$L(\frac{1}{2}) \times L(\frac{1}{16}) = L(\frac{1}{16})$, $L(\frac{1}{16}) \times L(\frac{1}{16}) = L(0) + L(\frac{1}{2})$

設定

V: V.O.A. $\supset L(\frac{1}{2}, 0)$, $L(\frac{1}{2}, 0)$-加群として $= \oplus L(h_i)$, とする . V の endomorphism τ を

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & W \simeq L(0) \text{ or } L(\frac{1}{2}), \\ -1 & W \simeq L(\frac{1}{16}). \end{cases}$$

と定めると $\tau \in \mathrm{Aut}(V)$.

$L(\frac{1}{2}, 0)$ のヴィラソロ元 $\in V$ を conformal vector と呼ぶ . V:正定値の内積を持つと仮定

$$e : \text{conformal vector} \iff \begin{cases} e \in V_2, \\ e_1 e = 2e, \\ e_2 e = 0, \\ e_3 e = c\mathbf{1} \text{ (実は } c = \frac{1}{4}). \end{cases}$$

$\alpha \in$ ルートラティス : $\langle \alpha, \alpha \rangle = 4$ に対して

$$\frac{1}{4}(\alpha_{-1}\alpha_{-1}\mathbf{1}) \pm \frac{1}{16}(e^{\alpha} + e^{-\alpha})$$

で central charge $\frac{1}{2}$ の conformal vector が定まる . (記号の説明略 .)

$V_1 = 0$ の時

$$|\langle \text{すべての conformal vectors からの自己同型} \rangle| < \infty.$$

E_8-型ルートラティスの中に互いに直交している 8 個の $\alpha_1, \cdots, \alpha_8$ s.t. $\langle \alpha_i, \alpha \subset \rangle = 4$ が存在する . これから構成すると , 互いに直交する 16 個の conformal vectors $\{e^1, \cdots, e^{16}\}$ を

得る．

$$V_{E_8} \ni \langle e^1, \ldots, e^{16} \rangle \simeq \underbrace{L(\frac{1}{2}, 0) \otimes \cdots \otimes L(\frac{1}{2}, 0)}_{16\text{個}} =: T.$$

$e^1, \ldots, e^{16}$ から定まる自己同型をそれぞれ $\tau^1, \cdots, \tau^{16}$ とし，それらが生成する群を P とする．

$$V_{E_8} = \oplus_{\chi \in \mathrm{ch}(P)} V^\chi,\ V^\chi = \{v \in V | gv = \chi(g)v \forall g \in P\}.$$

特に $V^1 = V^P$: 固定空間．V^P: T-加群として $L(\frac{1}{16})$ が無い．$L(0)$, $L(\frac{1}{2})$ のみ．

$$\sigma := \begin{cases} 1 & \text{on} \quad L(0), \\ -1 & \text{on} \quad L(\frac{1}{2}) \end{cases} \in \mathrm{Aut}(V^P).$$

V^P はコード V.O.A. となる．

$L(\frac{1}{2}, 0) \oplus L(\frac{1}{2})$: Super VOA

$$\begin{aligned} u \in L(\frac{1}{2}, 0) &\implies Y(n, z) \sim Y(v, z) \forall v, \\ u, v \in L(\frac{1}{2}) &\implies 0 = (z - x)^n \left[Y(n, z)Y(v, x) + Y(v, x)Y(n.z) \right] \text{ for } n \gg 0. \end{aligned}$$

$F = \begin{pmatrix} L(0) \\ \oplus \\ L(\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} L(0) \\ \oplus \\ L(\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$ に対して，$Y(\otimes v^i, z) := \otimes Y(v^i, z)$ と定義して linear に拡張する．

$\alpha = (a_i)$, $a_i = 0$ or 1 に対して $F_\alpha = \otimes_{i=1}^n L(\frac{a_i}{2}) \subset F$ とおく．$u \in F_\alpha, v \in F_\beta$ ならば

$$0 = (z - x)^n \left[Y(u, z)Y(v, x) + (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle} Y(v, x)Y(u, z) \right] \text{ for } n \gg 0$$

ただし $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$．

部分空間 $D \subseteq \mathbb{Z}_2^n$ の元 $\alpha = (\alpha_i)$ s.t. $\sum \alpha_i \equiv 0 (mod 2)$ を even linear code と呼ぶ．D の ± 1 による中心拡大 $\{\pm e^\alpha | \alpha \in D\}$ を考える．つまり

$$e^\alpha e^\beta = (-1)^{\langle \alpha, \beta \rangle} e^\beta e^\alpha.$$

$M_D = \sum_{\alpha \in D} F_\alpha \otimes e^\alpha$ として $Y(v \otimes e^\alpha, z) = Y(v,z) \otimes e^\alpha$ と定義すると (M_D, Y) が V.O.A. となる．

定理 4. $V^P \simeq M_D$ となる D が存在し, M_D も *rational* .

加群 $M = \oplus M_n$ に対して

$$\mathrm{ch}_M(z) = q^{\frac{-c}{24}} \sum_n (dim M_n) q^n,\ q = e^{2\pi i z}$$

とおき，M の character と呼ぶ．{ すべての既約加群の characters} はモジュラー不変．

$$\begin{aligned} ch_{L(0)}(z) &= \prod_{n \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}} (1+z^n) + \prod_{n \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}} (1-z^n). \\ ch_{L(\frac{1}{2})}(z) &= \prod_{n \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}} (1+z^n) - \prod_{n \in \frac{1}{2}+\mathbb{N}} (1-z^n). \\ ch_{L(\frac{1}{16})}(z) &= z^{\frac{1}{16}} \prod_{n \in \mathbb{N}} (1+z^n). \end{aligned}$$