⟨To be revised⟩

「結び目の話」

By

山田 修司 (京都産業大学)

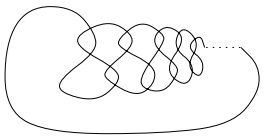
須藤 清一 (岡山理科大) 記

結び目の第 1 歩

··· 自明な結び目と自明でない結び目が違う事を数学的に証明する．

定義 1. $L \subset R^3$ または S^3，$L \cong S^1_1 \coprod \cdots \coprod S^1_l$: disjoint union，$L$ は smooth 又 は PL (piecewiselinear)* とする．この時 L を絡み目といい特に $l = 1$ の時結び目という．

* の条件をはずすと wildknot と呼ばれるものが生じる．

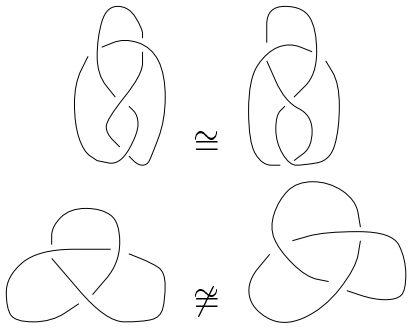
$S^1 \cong$  $\subset R^3$

扱いが難しい (e.g. 補空間の基本群が無限生成)．

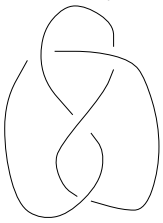
L に向きがついている場合を有向絡み目という．

L_1, L_2: 絡み目 $\subset R^3$ $L_1 \cong L_2$(同型) であるとは $\exists f : R^3 \longrightarrow R^3$: R^3 の向きを保つ homeo. s.t. $f(L_1) = L_2$．L_1, L_2 が有向である時は向きも込めてうつる．

$r : R^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y, -z) \in R^3$ とする．$r(L)$ を L の鏡像という．普通は $r(L) \ncong L$．$r(L) \cong L$ であるとき L をもろ手型という．



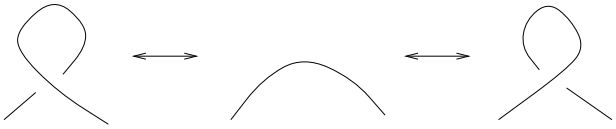
絡み目 L を R^3 内の平面 R^2 に射影したものに上下をつけて得られる図を L のダイアグラムという．但し多重点は横断的な二重的のみとする．



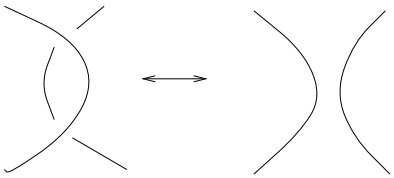
Reidemeister 変形

次の 3 種のダイアグラムの変形を Reidemeister 変形という．

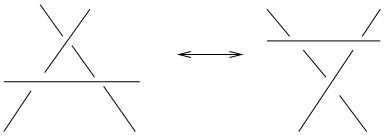
(RI)



(RII)



(RIII)



定理 2 (Reidemeister). D_1, D_2 を L_1, L_2 のダイアグラムとする．$L_1 \cong L_2 \iff D_1$ から D_2 へ有限回の R-変形でうつる．

結び目理論に組み合わせ論的な側面を与える定理．

結び目 (絡み目) 不変量 とは

$$L_1 \cong L_2 \Longrightarrow \varphi(L_1) = \varphi(L_2)$$

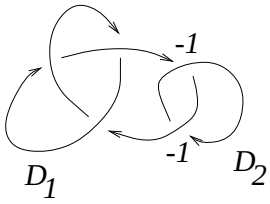
をみたす関数の事．

何に使うか？$\varphi($ $) = 3, \varphi($ $) = 0$ とすると $\ncong$ が示せる．

数々の結び目 (絡み目) 不変量

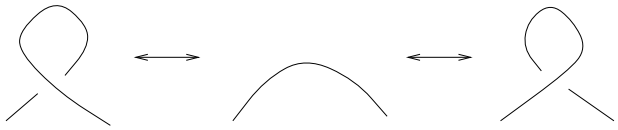
(1) 絡み数

$L = L_1 \cup L_2$: 2成分有効絡み目，$D = D_1 \cup D_2$: Lのダイアグラムに対して$\mathrm{sign}($ $) = +1$，$\mathrm{sign}($ $) = -1$ とおく．$lk(D_1, D_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1/2 \sum_{c \in D_1 \cap D_2} \mathrm{sign}(c)$ と定める．例えば

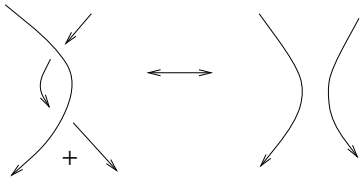


$$lk(D_1, D_2) \;=\; \frac{1}{2}(-1-1) = -1$$

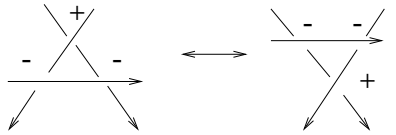
$lk(D_1, D_2)$ は R-変形で不変．

(RI) 

明らかに不変 (同じ成分の交差点だから)．

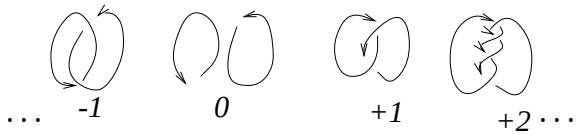
(RII) 

同じ成分ならカウントされない，違う成分なら両方とも $\frac{1}{2}(-1+1) = 0$ の contribution．

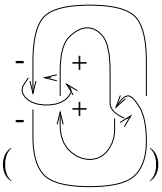
(RIII) 

対応する交差点の sign は変化しない．

従って $lk(L) = lk(L_1, L_2) = lk(D_1, D_2)$ は絡み目不変量．



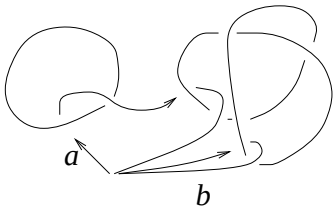
∴絡み目は無限にある．

$lk($ 

$) = 0$: ホワイトヘッド絡み目．

(2) 補空間の基本群

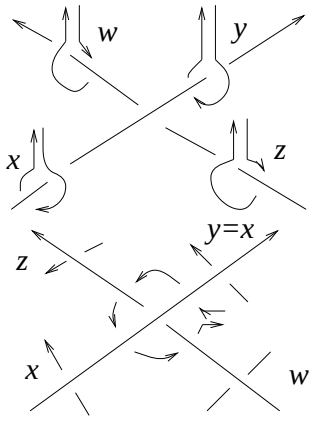
$L \subset R^3$, $G(L) = \pi_1(R^3 \setminus L)$: L の補空間の基本群．



積 ab: a を回ってから b を回る道．

$G(L)$ は L の不変量･･･ 強い不変量 (ある条件の下ではすべての結び目 (絡み目) を分類する)，しかし計算が大変難しい．

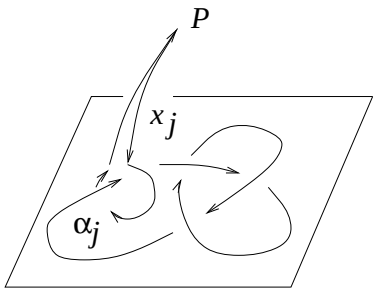
Wirtinger 表示



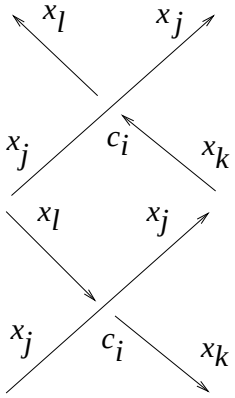
$x = y, w = x^{-1}zx$

$xwx^{-1}z^{-1} = 1$

D を有向ダイアグラムとする．D のひとつながりの辺を D の overpath という． には の 3 個の overpath がある．D の交点を $c_1, \cdots, c_m$ とする．overpath を $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ とする．基本群の基点 p を D がのっている平面の上方にとる．



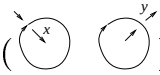
p を出て α_j の下を右から左へくぐり，p に帰るループを x_j と書く．交点 c_j の回りで読んだ relation を r_i とする．

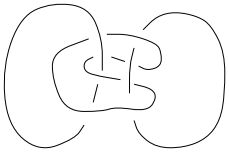


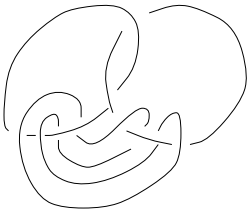
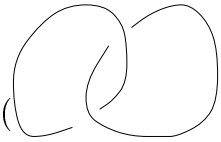
$r_i := x_j x_l x_j^{-1} x_k^{-1}$

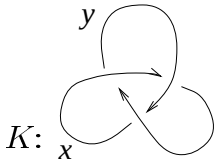
$r_i := x_j x_k x_j^{-1} x_l^{-1}$

$G(L)$ の Wirtinger 表示 とは $G(L) = \langle x_1, \cdots, x_m \mid r_1, \cdots, r_m \rangle$ ．

- $G($ $) = \langle x \mid \rangle \cong \mathbb{Z}$ ．
- $G($  $) = \langle x, y \mid \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$，$xy \neq yx$: 非可換群．

   $\longleftarrow [x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \neq 1$ ．
- $G($ $) = \langle x, y \mid xyx^{-}1y^{-}1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，$xy = yx$: 可換群．


$\longrightarrow [x,y] = xyx^{-1}y^{-1} = 1$: ほどける！( : ホップ絡み目．)



K: に対して

$$G(K) = \langle x, y, z \mid \{y = z^{-1}xz, z = x^{-1}yx, x = y^{-1}zy\}\rangle.$$

$G(K) \longrightarrow \mathfrak{S}_3$: 3 次対称群の上への表現が

$$\begin{aligned} x &\mapsto (1,2) \\ y &\mapsto (2,3) \\ z &\mapsto (1,3) \end{aligned}$$

で定まる．$\mathfrak{S}_3$ は非可換群だから $G(K)$ も非可換．従って $K \ncong$ ．

(3) Alexander 多項式

$F_n = \langle x_1, \cdots, x_m \mid \rangle$ をランク n の自由群とする．$\mathbb{Z}$-準同型

$$\frac{\partial}{\partial x_j} : \mathbb{Z}F_n \longrightarrow \mathbb{Z}F_n$$

を次で定める．

(1) $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$，

(2) $\frac{\partial (uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + u\frac{\partial v}{\partial x_j}$ ただし $u, v \in F_n$．

これを自由微分という．

$$G = \langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1, \cdots, r_n \rangle$$

とする．すなわち

$$\exists \text{ 全射準同型 } \varphi : F_n \longrightarrow G \text{ s.t. } Ker\varphi = \langle r_1, \cdots, r_m \rangle \lhd F_n.$$

今準同型 $\tau : G \longrightarrow Z = \langle t \mid \rangle$ があったとする．$A = [\tau \circ \varphi(\frac{\partial r_I}{\partial x_j})]$ は $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を要素とする $m \times n$ 行列．

$$\Delta_G = A \text{ の } n-1 \text{ 次小行列式の } \gcd \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$$

とおくと，Δ_G は unit 倍 ($\pm t^s$ 倍) を除いて G の不変量．

$G(L) = \pi_1(R^3 - L) = \langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1, \cdots, r_n \rangle$ の場合

$$\tau : G(L) \ni x_i \longrightarrow t \in \mathbb{Z}$$

と定める事により，$\Delta_{G(L)}$ が L の不変量となる．これを L の Alexander 多項式といい，Δ_L と書く．

Δ $= 1$

Δ $= t^2 - t + 1$

Δ $= t^2 - 3t + 1$

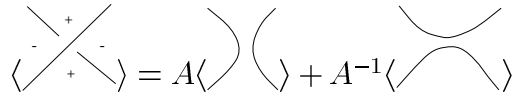
$K_1 :=$, $K_2 :=$

とおくと，$K_1 \ncong K_2$ だが $G(K_1) \cong G(K_2)$．

また Δ $= 1$ (樹下-寺阪の結び目)．

(4) Jones 多項式

ダイアグラム D に対して，$\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-}1]$ を

① 

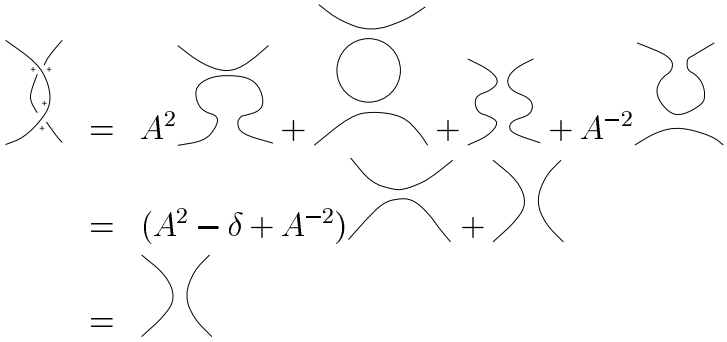
② $\langle D \amalg \bigcirc \rangle = \delta \langle D \rangle$ $(\delta = -A^2 - A^{-2})$

③ $\langle \bigcirc \rangle = 1$

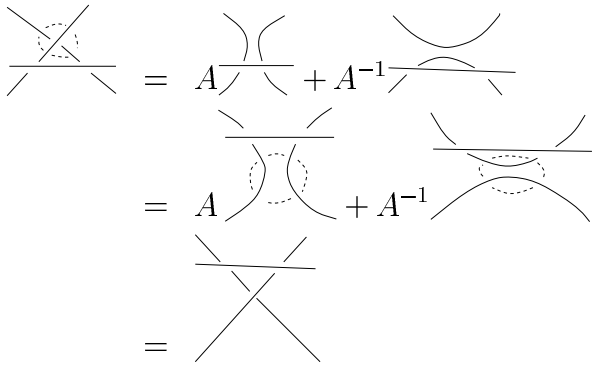
で定める．

定理 3 (Kauffmann). $\langle D \rangle$ **は** R**-変形** *II,III* **で不変．**

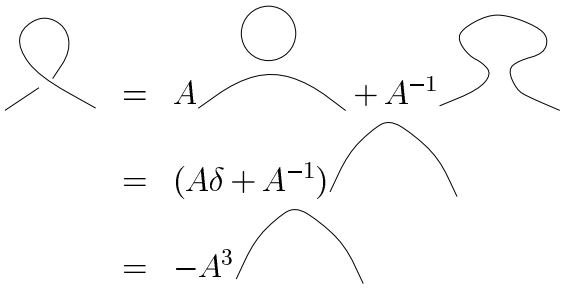
Proof. (RII)



(RIII)

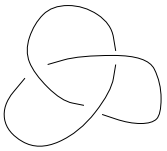
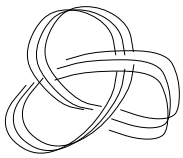
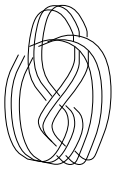


(RI)



Q.E.D.

系 4. $\langle D \rangle$ は $(-A^3)^*$ 倍を除いて，絡み目不変量．

$K :=$  , $K^{(3)} =$  , $K' :=$, $K'^{(3)} =$  とおくと，K と K' は区別できないが，$K^{(3)}$ と $K'^{(3)}$ を区別できる事がある．